

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2025

Mecânica Quântica

06/08/2023 - 9h00 às 12h00

→ Escolha três dentre as quatro questões.

→ Informe apenas seu CPF (não escreva seu nome na prova).

QUESTÃO 1 – EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER E REPRESENTAÇÕES DE ESTADOS

Um vetor de estado $|\psi\rangle$ pode ser representado na base de coordenadas, $\{|x\rangle\}$, ou na base de momentos, $\{|p\rangle\}$, respectivamente por:

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \int dp \langle x|p\rangle \langle p|\psi\rangle, \quad \langle p|\psi\rangle = \bar{\psi}(p) = \int dx \langle p|x\rangle \langle x|\psi\rangle,$$

com $\langle x|p\rangle = \langle p|x\rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp(ipx/\hbar)$.

- (a) (40%) Determine as expressões para os operadores posição, \hat{X} , e momento, \hat{P} , nas representações $\{|x\rangle\}$ e $\{|p\rangle\}$ e obtenha a equação de Schrödinger independente do tempo descrevendo um oscilador harmônico simples de massa m e frequência ω nestas duas representações.
- (b) (30%) A partir das propriedades dos operadores de criação e aniquilação de excitações do oscilador, determine o seu estado fundamental, $|\psi_0\rangle$, nestas duas representações, isto é, obtenha $\psi_0(x) = \langle x|\psi_0\rangle$ e $\bar{\psi}_0(p) = \langle p|\psi_0\rangle$.
- (c) (30%) Use as funções de onda obtidas no item anterior para calcular as incertezas ΔX e ΔP para o estado fundamental do oscilador e verifique o princípio de incerteza.

FORMULÁRIO:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{X} + i \frac{\hat{P}}{\sqrt{m\hbar\omega}} \right)$$

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

$$\int_0^\infty \exp(-ay^2) dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^\infty y^2 \exp(-ay^2) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}$$

QUESTÃO 2 – MATRIZES DE PAULI E CAMPO MAGNÉTICO DEPENDENTE DO TEMPO

Considere uma partícula de spin $\frac{1}{2}$, massa m e carga nula, dotada de um momento magnético $\vec{\mu} = g\vec{S}$, que está submetida a um potencial quadrático unidimensional $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Para tempos $t < 0$, a partícula está sujeita a um campo magnético uniforme ao longo da direção z , dado por $\vec{B}(t < 0) = \alpha\hat{z}$, onde α é uma constante. Para $t \geq 0$, um segundo termo é ligado ao campo magnético, que passa a ter a forma $\vec{B}(t \geq 0) = \alpha\hat{z} + \varepsilon\hat{x}$, sendo ε também uma constante. Considere que os estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ correspondem aos autoestados do operador S_z , com autovalores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, respectivamente.

Responda aos itens:

- (a) (35%) Escreva a forma matricial do hamiltoniano completo para $t < 0$, considerando explicitamente os termos espaciais e de spin. Em seguida, determine os autovalores e os autoestados do hamiltoniano para $t < 0$ na base de spin $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. Discuta como os estados espaciais seriam afetados pela interação de spin.
- (b) (20%) Escreva a forma matricial do hamiltoniano para $t \geq 0$ na mesma base de spin $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$, e indique a razão pela qual esta base deixa de ser apropriada para descrever os autoestados do sistema.
- (c) (20%) Diagonalize a matriz $\alpha\sigma_z + \varepsilon\sigma_x$ e reescreva o hamiltoniano para $t \geq 0$ na nova base de autoestados de spin. *Dica: expresse o resultado em termos do parâmetro $\theta = \arctan\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)$.*
- (d) (25%) Considere que a partícula esteja inicialmente no estado fundamental do oscilador e com spin $|\uparrow\rangle$. Determine a probabilidade de transição para o novo autoestado de spin correspondente ao menor autovalor de energia magnética, após a ligação da perturbação transversal em $t = 0$. Explore o limite de perturbação fraca $\varepsilon \ll \alpha$.

FORMULÁRIO:

Matrizes de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

QUESTÃO 3 – TRANSIÇÃO INDUZIDA NO ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

Considere o átomo de hidrogênio como um sistema de dois níveis, cujos estados relevantes são o estado fundamental $|1s\rangle$ e o estado excitado $|2p\rangle$, separados por uma energia $\hbar\omega_0$. Suponha que o átomo se encontre inicialmente no estado fundamental e que ele interaja com um campo elétrico externo descrito por:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t),$$

onde \vec{E}_0 é a amplitude constante do campo aplicado e ω é a frequência da radiação incidente. A interação entre o campo e o átomo é descrita, na aproximação de dipolo elétrico, pelo Hamiltoniano:

$$H_{\text{int}}(t) = -\vec{p} \cdot \vec{E}(t),$$

com $\vec{p} = -e\vec{r}$, sendo o momento de dipolo de transição $\vec{p}_{21} = \langle 2p | \vec{p} | 1s \rangle \neq 0$.

- (a) (30%) Calcule a probabilidade $P(t)$ de transição entre o estado $|1s\rangle$ e o estado $|2p\rangle$, usando a teoria de perturbação dependente do tempo em primeira ordem.
- (b) (20%) Mostre que $P(t)$ é proporcional a uma função do tipo $\left[\frac{\sin(z)}{z}\right]^2$, centrada em $\omega = \omega_0$.
- (c) (15%) Comente a condição de ressonância e as regras de seleção para o momento de dipolo elétrico, justificando a transição $1s \leftrightarrow 2p$.
- (d) (35%) Considere agora a interação com um campo policromático:
 - (i) (10%) Comente qualitativamente a influência da largura espectral do campo.
 - (ii) (15%) Mostre que, no limite de tempos longos, a função oscilatória tende a uma delta de Dirac centrada em ω_0 , e obtenha a expressão para a taxa de transição, $dP(t)/dt$.
 - (iii) (10%) Interprete o resultado anterior com base na regra de ouro de Fermi.

FORMULÁRIO:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin(xa)}{x} \right]^2 = \pi a \delta(x),$$

A amplitude de transição de $|A\rangle$ para $|B\rangle$ é dada por:

$$c_B^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \langle B | H_{\text{int}}(t') | A \rangle e^{i\omega_0 t'} dt'.$$

QUESTÃO 4 – MOMENTO ANGULAR E TEORIA DE PERTURBAÇÃO

Considere um sistema de duas partículas com spin $1/2$, que interagem segundo o hamiltoniano $H_0 = A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$, onde \vec{S}_1 e \vec{S}_2 são os operadores de momento angular das partículas e A uma constante positiva.

- (a) (20%) Na base $\{|s, m_s\rangle\}$, formada pelos autoestados de $\vec{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$ e $S_z = S_{1z} + S_{2z}$, os autoestados $|0,0\rangle$ (singleto) e $|1,0\rangle$ (triplete) são dados por

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle) \quad \text{e} \quad |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle),$$

onde $|+, -\rangle = |+\rangle|-\rangle$, com $|+\rangle$ e $|-\rangle$ sendo respectivamente autoestados das componentes S_{1z} e S_{2z} das partículas com autovalores $\hbar/2$ e $-\hbar/2$. Determine *todos* os autoestados e as autoenergias de H_0 .

- (b) (20%) Supondo que, em $t = 0$, o sistema se encontra no autoestado $|\Psi(0)\rangle = |+, -\rangle$, determine $|\Psi(t)\rangle$, o estado do sistema num tempo t .
- (c) (40%) Considere agora que o sistema interage com um campo magnético constante e uniforme ao longo da direção z , através do potencial de interação

$$V = \omega_L(S_{1z} + S_{2z}),$$

onde ω_L é uma constante proporcional à amplitude do campo aplicado. Use teoria de perturbação de primeira ordem para determinar as novas energias e os autoestados do sistema perturbado.

- (d) (20%) O sistema perturbado pode ser resolvido exatamente. Obtenha esta solução.